Continuidad

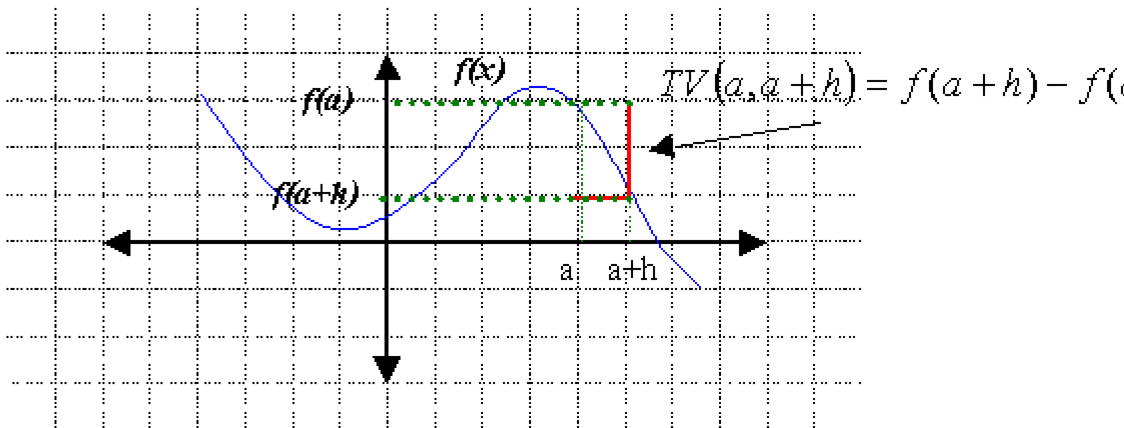
Tasa de variación de una función en un punto

La tasa de variación de una función en un punto ***x = a*** es el incremento de la función ***f(x)*** para un incremento de la variable independiente ***x*** . Es decir, si en un punto ***x = a***, incrementamos la variable ***x*** en ***h***, la tasa de variación es :

$$TV[a, a+h] = f(a+h) - f(a)$$

El incremento ***h*** puede ser positivo o negativo, según como sea el incremento se calcula la tasa de variación por la izquierda o por la derecha.

Gráficamente:



Función continua en un punto

Una función ***y = f(x)*** es continua en un punto ***x = a*** de su dominio si el límite de la tasa de variación es cero cuando el incremento de la variable independiente , ***h***, tiende a cero. Es decir :

$$lim_{h \to 0}\left[f(a+h) - f(a)\right] = 0$$

Función continua en un punto. Explicación dinámica

Función discontinua en un punto. Explicación dinámica

Intuitivamente una función es continua en un punto cuando a incrementos muy pequeños de la variable independiente, ***x***, le corresponden incrementos muy pequeños de la variable dependiente, ***y***. Dicho de otra forma, no se necesita levantar el lapiz del papel para dibujar la gráfica de la función.

Observación: Para que una función sea continua en un punto, es necesario que esté definida en ese punto.

Para el estudio de la continuidad de una función en un punto, es útil el siguiente teorema:

Son equivalentes las dos proposiciones siguientes:

a) f es continua en a

b) f tiene límite en a y $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Continuidad lateral

Una función es continua por la izquierda en el punto ***x = a*** si el límite lateral por la izquierda y el valor de la función en el punto son iguales. Es decir:

$$lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Una función ***y = f(x)*** es continua por la derecha en el punto ***x = a*** si su límite lateral por la derecha y el valor de la función en el punto son iguales. Es decir :

$$lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Función continua

Una función es continua si es continua en todos los puntos de su dominio .

Funciones continuas en un intervalo

Una función ***f(x)*** es ***continua en un intervalo abierto*** (a,b) , si la función es continua en todos los puntos del intervalo.

Una función ***f(x)*** es ***continua en un intervalo cerrado*** [a,b], si la función es continua en el intervalo (a,b) y es continua en el punto ***a*** por la derecha y en el punto ***b*** por la izquierda.

Máximos y mínimos de funciones continuas

Una función ***f(x)*** tiene un ***máximo relativo*** o local en un punto ***x = a*** , si existe un entorno de ***a***, ***E(a,r)*** tal que :

$$f(a) \geq f(x) \ para \ todo \ x \in E(a,r)$$

Una función ***f(x)*** tiene un ***mínimo relativo*** o local en un punto ***x = a***, si existe un entorno de ***a***, ***E(a,r)*** tal que:

$$f(a) \le f(x) \ para \ todo \ x \in E(a,r)$$

El ***máximo absoluto*** de una función ***f(x)*** en un intervalo ***I*** es un valor :

$$f(c), c \in I, tal \ que \ f(c) \ge f(x) \ para \ todo \ x \in I$$

El ***mínimo absoluto*** de una función ***f(x)*** en un intervalo ***I*** es un valor :

$$f(c), c \in I, tal \ que, f(c) \le f(x) \ para \ todo \ x \in I$$

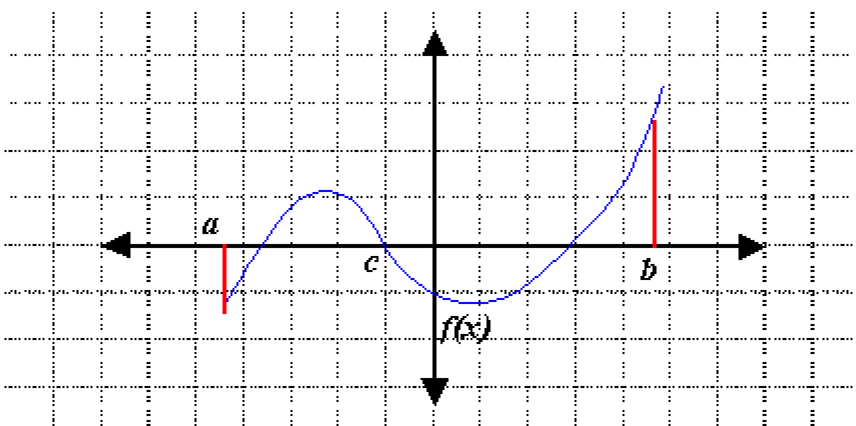
Observación : Tanto los máximos absolutos como relativos pueden ser alcanzados en varios puntos a la vez, igual para los mínimos.

Teorema de Bolzano o de las raíces

Si una función ***f(x)*** es continua en el intervalo cerrado ***[a,b]*** y en los extremos del intervalo toma valores de signos opuestos, entonces existe al menos un punto :

$$c \in (a,b) \ tal \ que \ f(c) = 0$$

Gráficamente:



Teorema de los valores intermedios

Si una función ***f(x)*** es continua en un intervalo cerrado ***[a,b]***, entonces la función toma todos los valores comprendidos entre ***f(a)*** y ***f(b)***.

Teorema de Weierstrass

Si una función ***f(x)*** es continua en el intervalo cerrado ***[a,b]***, entonces la función alcanza su máximo absoluto y su mínimo absoluto en el itervalo.